三次方程的解概论

1. 三次方程及其根的特征

1.1 问题的化简

对于一般的三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$，我们可以将三次方程平移，使其图像的对称中心位于 y 轴上，以便消去二次项，有如下结论：

prop：三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 总是等价于形式为 $x^3+px+q=0$ 的三次方程。

proof：考虑函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 为 $\mathbb{R}$ 上的函数。

由三次方程的中心对称性，可知其对称中心应为其拐点，我们有 $f''(x)=6x+2a$，且 $f''(-\frac{a}{3})=0$，则拐点为 $x=-\frac{a}{3}$。

作平移变换 $y=x+\frac{a}{3}$

方程 x^3+ax^2+bx+c 变为 $(y-\frac{a}{3})^3+a(y-\frac{a}{3})^2+b(y-\frac{a}{3})+c=0$

即 $y^3+(b-\frac{a^2}{3})y+c-\frac{ab}{3}-\frac{a^3}{27}=0$

令 $p=b-\frac{a^2}{3}$，$q=c-\frac{ab}{3}-\frac{a^3}{27}$ 有 $y^3+px+q=0$

注意到变换 $y=x+\frac{a}{3}$ 是可逆的，故两方程是等价的。

于是我们只用考虑形如 $x^3+px+q=0$ 的三次方程的根。

1.2 根的存在性

在 $\mathbb{C}$ 上，由代数基本定理，$x^3+px+q=0$ 总是有三个根。下面考虑 $x^3+px+q=0\in\mathbb{R}[x]$ 在 $\mathbb{R}$ 上的根存在性以及 $ax^3+px+q=0\in\mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的根的存在性。

关于 $\mathbb{R}$ 上的多项式可约性，我们有如下引理：

Lemma：$\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式只有一次多项式与二次多项式。

proof：一次多项式显然是不可约的。下面证明除一次多项式外不可

约多项式只有二次.

设 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$，$\deg f>1$ 且 $f(x)$ 不可约

则 $f(x)$ 必有一虚根 c，由于 $f(x)$ 的虚根共轭成对存在.

故 $\bar{c}$ 也是 $f(x)$ 的根

$\Rightarrow (x-c)(x-\bar{c})=x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}\mid f(x)$

但 $x^2-(c+\bar{c})x+c\bar{c}\in\mathbb{R}[x]$

故只能是 $f(x)$ 与 $(x-c)(x-\bar{c})$ 相伴 $\Rightarrow \deg f=2$.

根据引理我们可以得出三次方程根的如下特征.

Thm: 三次方程 $x^3+px+q=0$ 在 $\mathbb{C}$ 上必有一实数根，且另外两根为共轭虚根或两实数根.

proof: 由 Lemma. x^3+px+q 必能分解为一次与二次多项式的乘积 $\Rightarrow x^3+px+q=(x+a)(x^2+bx+c)$

则方程有实根 $x=-a$. 若 x^2+bx+c 有实根则为两实数根,

否则有两共轭虚根.

对于整系数三次多项式 ax^3+px+q 的有理根，总是与方程系数 a, q 相关. 有如下结论:

Thm: 若 $\frac{r}{s}$, $(r,s)=1$ 为 ax^3+px+q 的有理根，则有 $r\mid q$ 且 $s\mid a$.

proof: 将 $x=\frac{r}{s}$ 代入 $\Rightarrow a\frac{r^3}{s^3}+p\frac{r}{s}+q=0$

化简得到 $ar^3+prs^2+qs^3=0$. 我们有

$s\mid -qs^3=prs^2+ar^3$, $\quad r\mid -ar^3=prs^2+qs^3$

由于 $(r,s)=1$，立即有 $s\mid a$, $r\mid q$.

特别地，我们考虑 $x^3+px+q\in\mathbb{Z}[x]$ 的情形，这样的方程根只有三种情况

coro: $x^3+px+q=0$ 的根只可能为虚数，整数或无理数.
若为整数 t，则 $t \mid q$. 特别地若 q 为质数，方程整数根只可能为 ±1 或 $\pm q$.
proof: 设有根 x 不为无理数或虚数，则 $x \in \mathbb{Q}$
记 $x=\frac{r}{s}$. 则由前述定理 $s \mid 1$, $r \mid q \Rightarrow s=\pm1$，故 $x \in \mathbb{Z}$

1.3 根的重数

由多项式的重根与其形式导数的关系，我们可以得到如下三次方程在 $\mathbb{C}$ 上根的重数的结论.

prop: $x^3+px+q=0$ 有三重根 $\Longleftrightarrow p=q=0$.
proof: 设 $t\in\mathbb{C}$ 为其三重根.
则 t 也为其二阶形式导数 $3x$ 的根
$\Longleftrightarrow x=0$ 为 x^3+px+q 的三重根 $\Longleftrightarrow p=q=0$

可以看到三重根的结论是平凡的，下面考虑二重根并导出判别式.

Thm: $x^3+px+q=0$ 有二重根 $\Longleftrightarrow 4p^3+27q^2=0$
且二重根为 $-\frac{3}{2}\frac{q}{p}$
proof: 设 $t\in\mathbb{C}$ 为其二重根，当且仅当 t 为其二阶形式导数的一重根

我们有 $\begin{cases} t^3+pt+q=0 \\ 3t^2+p=0 \end{cases} \Longleftrightarrow t=-\frac{3}{2}\frac{q}{p}$

$\Longleftrightarrow 3\cdot\frac{9}{4}\frac{q^2}{p^2}+p=0 \Longleftrightarrow 27q^2+4p^3=0$

由此我们导出三次方程重根的判别式
$\Delta=27q^2+4p^3$

2、三次方程的求解

2.1 有理系数方程与整系数方程

对于有理系数三次方程 $x^3+\frac{p_1}{s_1}x+\frac{q_1}{t_1}=0$, $p_1,s_1,q_1,t_1\in\mathbb{Z}$, $(p_1,s_1)=(q_1,t_1)=1$. 在方程两边同乘 $\mathrm{lcm}(s_1,t_1)$ 总是可以化为整系数三次方程 $ax^3+px+q=0$. 根据高斯定理有解法:

Step: 对于 $ax^3+px+q=0$, $a,p,q\in\mathbb{Z}$

① 取 $r|q$, $s|a$, $(s,r)=1$

② 若 $\frac{r}{s}$ 为方程的根, 则由余数定理 $(x-\frac{r}{s})|ax^3+px+q$,
作多项式除法 $ax^3+px+q=(x-\frac{r}{s})g(x)$,
其中 $g(x)=0$ 为二次方程, 方程根为 $\frac{r}{s}$ 与 $g(x)$ 两根.

③ 否则, 若有未取完因数则回到 ①
不然. 方程无有理根.

2.2 一般三次方程.

下面考虑 $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{C}$ 上的根.

Lemma: 三阶循环矩阵的行列式. 记 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)$$

Pf: 我们有 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b\omega+c\omega^2 \\ c+a\omega+b\omega^2 \\ b+c\omega+a\omega^2 \end{pmatrix} = (a+b\omega+c\omega^2)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b\omega^2+c\omega^4 \\ c+a\omega^2+b\omega^4 \\ b+c\omega^2+a\omega^4 \end{pmatrix}=(a+b\omega^2+c\omega^4)\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega^4 \end{pmatrix}$$

故 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega^4)$

Step: 三次方程 $x^3+px+q=0$ 的一般解

① 记 $A=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ 则 $|xI-A|=\begin{vmatrix} x & -b & -c \\ -c & x & -b \\ -b & -c & x \end{vmatrix}=(x-b-c)(x-b\omega-c\omega^2)(x-b\omega^2-c\omega)$

$$\begin{vmatrix} x & -b & -c \\ -c & x & -b \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3-3bcx-(b^3+c^3)$$

② 于是若 $x^3+px+q=x^3-3bcx-(b^3+c^3)$

$\Rightarrow \begin{cases} p=-3bc \\ q=-b^3+c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3c^3=-\frac{p^3}{27} \\ b^3+c^3=-q \end{cases}$ i.e. b^3 与 c^3 为 $x^2+qx-\frac{p^3}{27}=0$ 的两根

$$b=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}},\quad c=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

③ 三次方程根为 $b+c$，$b\omega+c\omega^2$，$b\omega^2+c\omega$

注意到若 $\Delta=0 \Rightarrow$ 二重根为 $-\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$